

<b>Mathématiques</b> <b>Calcul</b>	
Connaissances	Capacités
<b>Épreuve 1 et Épreuve 2</b>	
	<p>Organiser et effectuer mentalement ou avec l'aide de l'écrit,<sup>1</sup> sur des nombres entiers, un calcul additif, soustractif, multiplicatif ou un calcul de division en s'appuyant sur des résultats mémorisés et en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations.</p> <p>(Objectifs de fin de cycle 3 : programmes 2007, BO HS n°5 du 12 avril 2007, nouvelle édition, p 93)</p>
<b>Fiche</b> <b>CA2</b>	<b>Calcul mental réfléchi</b>
Activités de l'élève	<p><b>Épreuve 1</b> Exercice 21 (items 91 à 96) Déterminer mentalement et en temps limité une somme, une différence et quatre produits, l'opération étant dictée par l'enseignant.</p> <p><b>Épreuve 2</b> Exercice 40 (items 158 à 161) Déterminer mentalement et en temps limité quatre sommes simples écrites au tableau (l'une après l'autre) par l'enseignant.</p>
Hypothèses sur les difficultés rencontrées par l'élève	<p>De manière générale, la réussite des calculs proposés nécessite à la fois une bonne maîtrise de la numération chiffrée et parlée ainsi que celle des répertoires additifs et multiplicatifs.</p> <p>Pour les deux premiers items de l'exercice 21 (trois fois trente et deux fois quatre cents), deux procédures sont a priori envisageables :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• l'élève associe correctement le mot « fois » à son sens et il cherchera mentalement la réponse dans la liste des multiples de 30 ou de 400 (ici le triple de 30 et le double de 400)</li> <li>• l'élève associe le mot « fois » à une multiplication qui est elle même associée à une technique opératoire ; il devra alors gérer mentalement une multiplication posée ; il aura donc besoin pour cela d'associer chaque nombre à son écriture chiffrée ; cela peut donc occasionner des pertes d'informations, en particulier si la gestion des « 0 » est mal assurée.</li> </ul> <p>Les deux items suivants relèvent du répertoire additif, Pour déterminer la différence <math>105 - 10</math>, on peut envisager au moins deux procédures relevant du calcul réfléchi :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• l'élève décompose 105 en <math>100 + 5</math> et ôte 10 au premier terme : <math>105 - 10 = (100 + 5) - 10 = (100 - 10) + 5 = 90 + 5 = 95</math></li> <li>• l'élève décompose le second terme 10 en une somme de deux termes égaux à 5 : <math>105 - 10 = (105 - 5) - 5 = 100 - 5 = 95</math></li> </ul> <p>Une 3<sup>ème</sup> méthode consisterait à poser et à effectuer mentalement la soustraction ; la gestion de la retenue sur les chiffres des dizaines pourrait alors constituer un obstacle pour les élèves ne se mettant pas en situation de calcul réfléchi.</p> <p>Cet obstacle serait fortement présent à l'item suivant pour ces élèves qui voudraient obtenir par une gestion mentale de l'addition posée la somme <math>37 + 99</math> alors que celle-ci peut se déterminer par l'une des sommes algébriques <math>(36 + 1) + 99</math> ou <math>37 + (100 - 1)</math> auxquelles on peut appliquer implicitement l'associativité en calculant dans les faits <math>36 + (1 + 99)</math> ou <math>(37 + 100) - 1</math>.</p>

<sup>1</sup> Le texte en grisé correspond à une partie de la compétence qui n'est pas prise en compte par le ou les exercice(s) proposés.

	<p>Les deux derniers items de cet exercice relèvent du répertoire multiplicatif. Pour déterminer le produit 10 fois 18, l'élève peut :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• transformer ce produit en 18 fois 10 et chercher le 18<sup>ème</sup> terme de la liste des multiples de 10 non nuls. Déterminer le dixième multiple de 18 en les énumérant l'un après l'autre n'est pas réalisable dans le temps donné ;</li> <li>• transformer ce produit en 18 fois 10 et l'associer alors à 18 dizaines ;</li> <li>• appliquer une règle connue telle que « pour multiplier un entier par 10, on rajoute un zéro à la droite de l'écriture en chiffre du nombre entier à multiplier ». On connaît les sources d'erreurs liées à cette règle lorsqu'on l'applique aux nombres décimaux ;</li> <li>• gérer mentalement la multiplication posée.</li> </ul> <p>La détermination du produit 20 fois 18 est fortement liée à celle du produit précédent puisqu'il en est manifestement le double.</p> <p>Si les élèves réussissent les items 91 et 92 et ne réussissent pas ces deux derniers items, l'hypothèse de la non disponibilité de la commutativité de la multiplication (non évidente avec la formulation « fois ») est à envisager.</p> <p>L'exercice 40, proposé dans l'épreuve 2, permettra d'affiner le diagnostic pour les élèves repérés en grande difficulté dans le domaine additif. Le calcul étant présenté en ligne :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• l'élève sait-il ajouter deux nombres entiers de dizaines ? (item 158) ;</li> <li>• l'élève sait-il ajouter une dizaine à un entier inférieur à 100 ? (item 159) ;</li> <li>• l'élève sait-il ajouter un nombre entier inférieur à 10 à un nombre entier à deux chiffres ? (item 160) ;</li> <li>• l'élève sait-il ajouter un nombre entier de centaines à un nombre entier inférieur à 100 ? (item 161).</li> </ul> <p>En cas d'échec, la remédiation relèvera plus d'une meilleure connaissance du système de numération (voir fiche CN1)</p>
<p>Quelques principes pour guider les activités à mettre en œuvre</p>	<p>Le calcul réfléchi est d'une autre nature que le calcul automatisé. Il ne s'agit plus de récupérer directement en mémoire un résultat ou une procédure directement applicable, mais d'élaborer une procédure adaptable au calcul qui est proposé. Stratégie et raisonnement sont alors sollicités.</p> <p>Au cycle 3, la frontière entre calcul automatisé et calcul réfléchi n'est pas toujours facile à préciser. Au même moment, elle peut varier d'un élève à l'autre. Il est utile d'analyser avec les élèves les procédures de calcul utilisées en faisant apparaître la variété des démarches possibles.</p> <p>Le recours au calcul mental n'a de sens que si les situations proposées en créent le besoin chez l'élève. Si un entraînement quotidien est nécessaire, le calcul mental ne doit pas être limité aux seules plages horaires prévues à cet effet. Il a pleinement sa place dans la résolution de problèmes et en particulier lors de situation de proportionnalité. On trouvera des exemples d'activités dans les documents d'application et les documents d'accompagnement des programmes de mathématiques.</p>
	<p>Les supports utilisés ici sont tous dans le domaine du calcul mental sans support de l'écrit. Il est indispensable que les procédures de calcul réfléchi qui seront initiées dans les situations proposées s'appuient aussi sur l'écrit. Celui-ci pourra se situer dans le domaine algébrique (successions d'égalités) ou même dans le domaine schématisés (succession d'opérateurs).</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Exemple 1 :</p> <p>Un 1<sup>er</sup> bocal contient 37 jetons. Un 2<sup>ème</sup> bocal contient 100 jetons. On vide entièrement le 2<sup>ème</sup> bocal dans le premier mais on s'aperçoit qu'il reste au fond un jeton collé au fond. Combien y a-t-il de jetons en tout dans le 1<sup>er</sup> bocal ?</p> </div> <p>Deux procédures de calcul sont envisageables :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Déterminer le nombre de jetons espérés (<math>37 + 100 = 137</math>) puis rectifier (<math>137 - 1 = 136</math>)</li> </ul>

- Déterminer le nombre de jetons effectivement transvasés ( $100 - 1 = 99$ ) puis l'ajouter à l'existant ( $37 + 99 = 136$ )

La confrontation des écrits proposés par les élèves peut alors amener l'enseignant à formaliser de nouveaux écrits tels que :

$$37 + 99 = 37 + (100 - 1) = (37 + 100) - 1$$

Si le premier membre de cette suite d'égalités peut inciter à poser l'opération, le 3<sup>ème</sup> membre peut se gérer mentalement.

La mise en œuvre de cette idée, en classe, suppose, comme il l'est indiqué dans les documents d'accompagnement (partie 2 : Résolution de problèmes et apprentissage : des solutions personnelles vers les solutions expertes), que l'on renonce à exiger une forme de présentation stéréotypée de la solution du type :

Solution		Opération
----------	--	-----------

et que l'on privilégie une présentation plus ouverte comme, par exemple :

Recherche		Conclusion
-----------	--	------------

Exemple 2 :

Pierre a écrit la liste des dix premiers multiples non nuls de 18 et Jean a écrit la liste des dix-huit premiers multiples non nuls de 10.

Liste de Pierre : {18 ; 36 ; 54 ; .....}

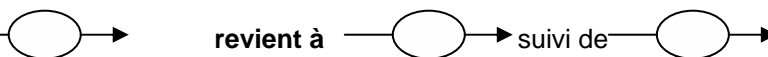
Liste de Jean : {10 ; 20 ; 30 ; .....}

Pierre dit : « Mon dernier nombre écrit est plus grand que le tien. »

Jean affirme le contraire.

Qui a raison ? Justifie ta réponse

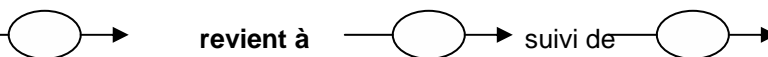
La présentation de cette situation entraîne l'élève à rester dans des procédures personnelles. Il pourra établir assez facilement la liste de Jean. Celle de Pierre peut être plus difficile à obtenir. Cela peut être ici l'occasion de rentrer dans le calcul instrumenté ou bien de faire travailler des procédures de calcul réfléchi telle que :



Pour aller vers une solution experte, on pourra demander aux élèves de trouver le vingtième nombre de la liste de Pierre et demander alors combien de nombres Jean doit écrire pour arriver au même résultat.

A travers cette activité, l'élève donnera du sens à l'égalité  $10 \text{ fois } 18 = 18 \text{ fois } 10$  ainsi qu'au résultat qui apparaît dans la double égalité  $10 \times 18 = 18 \times 10 = 180$ .

On pourra observer ici que la méthode de calcul réfléchi précédemment citée peut être transférable pour l'obtention de la liste des multiples de 9



{ **9** ( 19 ) **18** (28) **27** (37) **36** (46) **45** (55) **54** (64) **63** (73) **72** (82) **81** ....

Exemple 3 :

a) Pierre possède 53 billes et Jean possède 17 billes.

Combien Pierre a-t-il de billes de plus que Jean ?

b) Leurs parents leur en donnent 3 à chacun ?

Combien maintenant Pierre a-t-il de billes de plus que Jean ?

La compréhension de la situation amène rapidement à affirmer que la réponse à la 2<sup>ème</sup> question est identique à celle de la première question.

La sollicitation du calcul effectif du nombre de billes de Pierre (56) et Jean (20) dans la 2<sup>ème</sup> phase peut déclencher alors un conflit cognitif entre la non - égalité des deux différences  $53 - 17$  et  $56 - 20$  dans le cas où la première serait erronée suite à des erreurs liées à la technique opératoire.

Exemples d'activités

	<p>L'enseignant pourra alors formaliser une procédure de calcul réfléchi liée à la propriété de la soustraction indiquant qu'une différence ne change pas si on ajoute ou on retranche un même nombre aux deux termes. Ainsi <math>53 - 17 = (53 + 3) - (17 + 3) = 56 - 20 = 36</math>.</p> <p>Il sera intéressant de faire observer aux élèves qu'en fonction de la proximité du 2<sup>ème</sup> terme aux deux nombres de dizaines entières qui l'encadrent, on peut choisir la dizaine inférieure. Ainsi, pour déterminer la différence <math>41 - 12</math> il est préférable d'enlever 2 à chaque terme et de calculer <math>39 - 10</math>.</p> <p>De même, d'autres calculs de différence comme <math>53 - 12</math> ne relèvent pas forcément de telles procédures.</p> <p>Cela souligne trois points importants rappelés dans le document d'accompagnement :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• la liste des calculs qui relèvent du calcul réfléchi ne peut pas être exhaustive et celles qui sont données ici peuvent donc être adaptées par les enseignants ;</li> <li>• les procédures pour traiter un même calcul sont diverses et les élèves doivent pouvoir choisir celle qui, de leur point de vue, est la mieux adaptée : elle dépend de leurs connaissances disponibles sur les nombres et les opérations en jeu.</li> <li>• l'explicitation des procédures et le débat organisé autour de leur validité favorisent les progrès des élèves.</li> </ul>
Référence	<p>(1) Documents d'application des programmes : mathématiques cycle 2, <a href="http://www.cndp.fr/archivage/valid/84987/84987-13527-17130.pdf">http://www.cndp.fr/archivage/valid/84987/84987-13527-17130.pdf</a> et mathématiques cycle 3, <a href="http://www.cndp.fr/archivage/valid/37570/37570-6102-5922.pdf">http://www.cndp.fr/archivage/valid/37570/37570-6102-5922.pdf</a> ;</p> <p>(2) Documents d'accompagnement, mathématiques école primaire, <a href="http://www.cndp.fr/archivage/valid/68718/68718-10580-14939.pdf">http://www.cndp.fr/archivage/valid/68718/68718-10580-14939.pdf</a> : partie II : Résolution de problèmes et apprentissage : des solutions personnelles vers les solutions expertes partie IV - Le calcul mental à l'école élémentaire.</p>