<table>
<tr><th colspan="2">Mathématiques
Calcul</th></tr>
<tr><td>Connaissances</td><td>Capacités</td></tr>
<tr><td colspan="2">Épreuve 1</td></tr>
<tr><td>Connaître une technique opératoire pour l’addition, la soustraction, la multiplication, la division euclidienne.
(Objectifs de fin de cycle 3 : programmes 2007, BO HS n°5 du 12 avril 2005, nouvelle édition, p 93)</td><td>- Calculer des sommes et des différences de nombres entiers ou décimaux[1], par un calcul écrit en ligne ou posé en colonne ;
- calculer le produit de deux entiers ou le produit d’un décimal par un entier (3 chiffres par 2 chiffres), par un calcul posé ;
- calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d’un nombre entier (d’au plus 4 chiffres) par un nombre entier (d’au plus 2 chiffres), par un calcul posé.
(Objectifs de fin de cycle 3 : programmes 2007, BO HS n°5 du 12 avril 2007, nouvelle édition, p 93)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Épreuve 2</td></tr>
<tr><td></td><td>Rappel des compétences du cycle 2

- organiser et traiter des calculs additifs, soustractifs, multiplicatifs sur les nombres entiers.

(Objectifs de fin de cycle 2 : programmes 2007, BO HS n°5 du 12 avril 2007, nouvelle édition, p 56)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Fiche CA3</td><td>Poser et effectuer les opérations usuelles</td></tr>
<tr><td>Activités de l’élève</td><td>Epreuve 1
Exercice 19 :
item 84 Effectuer une addition posée ;
item 85 Effectuer une soustraction posée ;
item 86 Poser et effectuer une addition ;
item 87 Effectuer une multiplication posée (2 chiffres au multiplicateur) ;
item 88 Effectuer une division euclidienne posée.
Epreuve 2
Exercice 39 :
item 154 Effectuer une addition posée (sans retenue) ;
item 155 Effectuer une addition posée ;
item 156 Effectuer une soustraction posée (sans retenue) ;
item 157 Effectuer une multiplication posée (1 chiffre au multiplicateur).</td></tr>
<tr><td>Hypothèses sur les difficultés rencontrées par l’élève</td><td>Item 84 :
- difficulté de mémorisation des calculs intermédiaires (si 5 comme chiffre des unités (5+7=12…7+8=15… et on a oublié le 12) ;
- erreurs dans le calcul élémentaire de somme (erreurs de +1 ou –1 dans un calcul partiel,
méconnaissance des tables, difficulté de coordination pour le surcomptage) ;
- erreurs liées à la gestion spatiale et temporelle de la retenue (ex 160 au lieu de 170).
Item 85, erreurs liées à une application aléatoire de la technique :
- chercher l’écart entre les chiffres sans tenir compte du sens (23 au lieu de 17) ;
- erreurs dans le calcul élémentaire de différence (erreurs de +1 ou –1 dans les piles) ;
- erreur de gestion de la retenue (signale éventuellement une compréhension incomplète du sens de la soustraction) : 27 ou 37.</td></tr>
</table>

[1] Le texte en grisé correspond à une partie de la compétence qui n’est pas prise en compte par le ou les exercice(s) proposés.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Item 86, id item 84 + erreurs liées à une mauvaise maîtrise de la numération (ex 938 au lieu de 371) : addition « mal posée ».
Item 87 :
- erreurs dans les calculs de produits, méconnaissance des tables (rapprocher l'item 87 des items 78 à 83 de l'exercice 17) ;
- erreur de gestion de la retenue (qui est ajoutée et multipliée), beaucoup de possibilités de résultats erronés liés à cette erreur (sans compter les erreurs cumulées), par exemple : 34944 ou 30044 au lieu de 29784 ;
- erreur de décalage (rapprocher avec la maîtrise de la numération décimale, items 57 à 63) : 6132.
Item 88 :
- la non-réponse peut signaler un problème de gestion du temps ou une méconnaissance de la technique (à vérifier) ;
- certaines erreurs sont caractéristiques d'une technique en cours d'acquisition (par exemple un oubli de la règle r < d, 114 au lieu de 24).

Les items 154 à 157 permettent d'affiner l'analyse ci-dessus. La réussite aux items 154 et 156 (absence de retenue) permet de confirmer l'hypothèse « gestion de la retenue » aux items 84 à 86 et à l'inverse de confirmer l'hypothèse « calcul élémentaire » en cas d'échec.
De même la réussite à l'item 157 confirme l'hypothèse « erreur de décalage » à l'item 87, l'échec confirmant plutôt l'erreur « calcul de produits, méconnaissance des tables ».</td>
</tr>
<tr>
<td>Quelques principes pour guider les activités à mettre en œuvre</td>
<td>Dans le cadre du socle commun, les programmes de 2007 insistent plus explicitement que ceux de 2002 sur la maîtrise des techniques opératoires : « La maîtrise d'une technique opératoire pour chacune des opérations est indispensable. Le travail de construction et d'appropriation de ces techniques fait appel à de nombreuses propriétés du système d'écriture des nombres (numération décimale de position). L'apprentissage doit être conduit avec le souci qu'en soit assurée la compréhension. L'objectif d'automatisation des procédures repose sur une pratique progressive, régulière et bien comprise du calcul. Dans tous les cas, les élèves doivent être entraînés à utiliser des moyens de contrôle des résultats de leurs calculs.
La maîtrise des techniques opératoires des quatre opérations, addition et soustraction de nombres entiers et décimaux, multiplication de deux nombres entiers ou d'un nombre décimal par un nombre entier, division euclidienne de deux entiers, est un objectif important du cycle 3. » (1)
Si la technique de chaque opération doit être appréhendée en liaison étroite avec le sens, certains élèves peuvent avoir besoin de séances spécifiques où la technique est travaillée de façon autonome, par exemple pour la division en décomposant la technique ou en utilisant l'algorithme extrait des ACIM de Planchon (Cf. « Exemples d'activités »).
Les élèves pour lesquels l'analyse des résultats a surtout mis en évidence des erreurs de calcul élémentaire se verront proposer des activités systématiques d'apprentissage et d'utilisation des tables et des relations particulières entre certains nombres (voir fiche C1 et C2).
Ceux qui montrent des lacunes concernant la connaissance des nombres se verront également proposer des activités spécifiques (voir fiche CN1).
Des liens seront efficacement mis en œuvre entre ces différents apprentissages, et notamment le matériel et les manipulations utilisés pour la connaissance des nombres seront utilement exploités pour l'apprentissage des techniques opératoires, en particulier pour matérialiser les retenues.
Un retour à une décomposition sera nécessaire pour certains élèves, par exemple ceux qui auront montré des erreurs de décalage dans la technique de la multiplication.
ex : pour multiplier 325 par 37, on posera 325x7= 2275 puis 325x30=9750 et on explicitera

<table>
<tr><td></td><td>325</td></tr>
<tr><td></td><td>x 37</td></tr>
<tr><td>325x7 →</td><td>2275</td></tr>
<tr><td>325x30 →</td><td>+ 9750</td></tr>
<tr><td></td><td>12025</td></tr>
</table>
ou :
<table>
<tr><td></td><td></td><td>c</td><td>d</td><td>u</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>x</td><td></td><td>3</td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>2</td><td>7</td><td>5</td></tr>
<tr><td>+</td><td>9</td><td>7</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>5</td></tr>
</table>

– une maîtrise de ces techniques, dans des cas simples, permet aux individus de mieux apprécier l'efficacité des instruments qu'ils utilisent ;
– un travail visant à la construction, à l'analyse et à l'appropriation de ces techniques conduit à utiliser et combiner de nombreuses propriétés relatives au système d'écriture des nombres (numération décimale de position) et aux opérations en jeu ; en retour, ce travail assure une meilleure maîtrise de ces propriétés. En résumé, l'étude des techniques de calcul posé doit</td>
</tr>
</table>

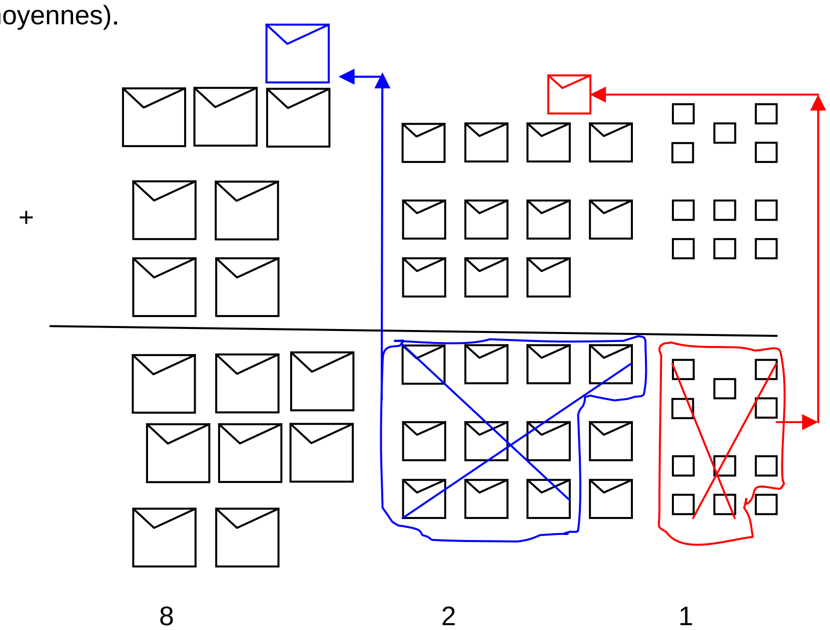
être résolument orientée vers la compréhension et la justification de leur fonctionnement. Elle ne peut donc, en aucun cas, se limiter à l'apprentissage de récitatifs.

Généralement, les calculs sont proposés en ligne, le choix de les effectuer en ligne ou posés «en étages» revenant à l'élève. Enfin, dans tous les cas, l'élève doit être incité et entraîné à utiliser des moyens de contrôle des résultats obtenus (comme dans le cas du calcul instrumenté) : recherche d'un ordre de grandeur du résultat, contrôle du chiffre des unités, vérification par une addition dans le cas de la soustraction ou par celle de l'égalité a = bq + r dans le cas de la division. (2)

Exemples d'activités

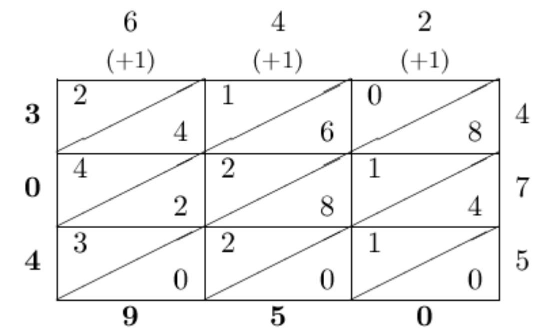
Les élèves pour lesquels les évaluations auront mis en évidence des erreurs liées à une technique « fluctuante », à une mauvaise gestion des retenues ou à un problème de décalage (pour la multiplication) bénéficieront particulièrement de séances courtes et répétées de manipulation de matériel type « Multibase » (en effectuant les échanges), bouliers, abaques. Dans le cas où aucun matériel n'est disponible, on pourra utiliser des enveloppes de différentes tailles (une petite enveloppe contient 10 cartons, une moyenne contient 10 petites, une grande contient 10 moyennes).

Exemples : 345 + 476 →



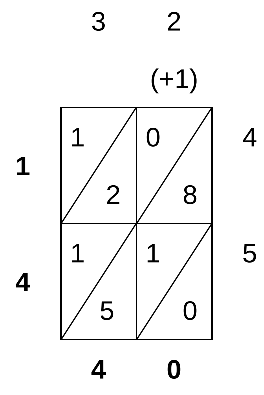
345 + 476 = 821
Pour l'addition ou la multiplication, on emplira de nouvelles enveloppes (retenues), pour la soustraction, on videra des enveloppes pour pouvoir retirer effectivement des cartons.
Les élèves pour lesquels la difficulté principale en multiplication est le décalage des dizaines, la compréhension sera favorisée par une technique détournée, telle que la multiplication « per gelosia ».(3)

Exemple : Soit à multiplier 642 ×475. On a ici à gérer des retenues dans chaque diagonale (indiquées entre parenthèses). Noter que ce sont des retenues additives, non multiplicatives :



Le résultat est : 304 950

Un exemple plus simple : 32 x 45

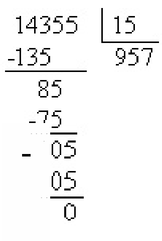


Le résultat est : 1440

Le calcul de divisions (quotient entier et reste) doit être limité à des cas raisonnables : dividende ayant au plus quatre chiffres, avec pose effective des soustractions intermédiaires et possibilité de poser des produits partiels annexes pour déterminer certains chiffres du quotient.

L'algorithme de la division sera repris dans le programme de 6e et prolongé au cas du quotient décimal.
Pour la division euclidienne, il n'existe pas de signe conventionnel pour le quotient entier. Pour rendre compte complètement du calcul (quotient entier et reste), l'égalité caractéristique de la division est utilisée : 37 = (5 x 7) + 2 (en soulignant que le reste est inférieur au diviseur).
Dans le cas où le résultat obtenu est le quotient exact, le symbole «:» est licite : 15 : 3 = 5 ou 37 : 5 = 7,4. Mais l'écriture 2 : 3 = 0,666 est erronée. Il est en revanche possible d'écrire : 1 : 3 ≈ 0,666. On évitera d'utiliser des écritures du type 37 : 5 = 7 (reste 2).
Une difficulté pour certains élèves est la gestion des diviseurs à 2 chiffres puisqu'il est nécessaire de bien maîtriser la multiplication et la soustraction. Une présentation en tableau permet de mettre en évidence les calculs qui sont effectués dans cette technique un peu « opaque »
Exemple : division de 14 355 par 15

Nous l'effectuons habituellement comme suit :



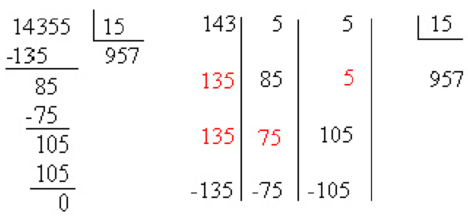
En fait, ce que nous écrivons cache diverses décompositions du nombre 14 355. Progressivement, ces décompositions visent à identifier des multiples de 15.
Voici comment nous suggérons de justifier cette technique. Certes, au début, les nombres seront plus petits et le diviseur sera inférieur à 10. Gardons cependant, pour mieux voir ce qui se passe, la division 14 355 / 15.

Il faut chercher, pour chaque position, des multiples de 15 qui, additionnés ensemble, donnent 14 355.
- on cherche le plus grand multiple, en centaines, de 15 que l'on pourra ôter de 143 centaines (9 x 15 = 135) ; on effectue la différence entre 143 centaines et 135 centaines (143 - 135 = 8).
- les 8 centaines excédentaires deviennent 80 dizaines. Nous avons donc 85 dizaines en tout.
- on cherche le plus grand multiple, en dizaines, de 15 que l'on pourra ôter de 85 dizaines (5 x 15 = 75) ; on effectue la différence entre 85 dizaines et 75 dizaines (85 - 75 = 10).
- les 10 dizaines excédentaires deviennent 100 unités. Nous avons donc 105 unités en tout.
- on cherche le plus grand multiple, en unités, de 15 que l'on pourra ôter de 105 unités (7 x 15 = 105).

Notons ce qui vient d'être décrit afin de mieux comprendre.

	1 4 3	5	5 ÷ 15
devient d'abord	1 3 5	85	5 ÷ 15
puis	1 3 5	75	105 ÷ 15

Il est maintenant facile de diviser 135 centaines, puis 75 dizaines et enfin 105 unités par 15. Nous obtenons 9 centaines + 5 dizaines + 7 unités, donc 957. Comparons cette division à la division habituelle.



Dans la division de droite, si nous enlevons les nombres écrits en rouge, qui ne sont que des répétitions des nombres 135, 75 et 5, nous obtenons la forme de gauche, laquelle constitue un condensé de la décomposition en colonnes inscrite à droite. (4)

Références

(1) Programmes de l'école primaire - BO HS n°5 du 12 avril 2007
(2) Documents d'accompagnement, mathématiques école primaire, *http://www.cndp.fr/archivage/valid/68718/68718-10580-14939.pdf : le calcul posé à l'école élémentaire, p 50 à 54*
(3) http://web-ia.ac-poitiers.fr/ia17/Rochefort/spip.php?article69
(4) http://www.defimath.ca/mathadore/vol1num37.html